Marius PERIANU • Cătălin STĂNICĂ
Ioan BALICA • Cătălin MÎINESCU • Cristian LAZĂR

Matematică

pentru

Evaluarea Națională

Teme, probleme și teste de verificare

Clasa a VIII-a

art educațional

Cuprins

Capitolul 1. Aritmetică/Algebră

Capitolul 2. Geometrie

Capitolul 3. Variante de subiecte

Tema 1.1

Numere naturale. Operaţii cu numere naturale

(clasa a V-a)

Mulţimea $\{0,1,2,3,4,...\}$ a numerelor naturale se notează cu $\mathbb{N}$.

Mulţimea $\mathbb{N}\setminus\{0\}$ este mulţimea numerelor naturale nenule; ea se notează cu $\mathbb{N}^*$.

Cu numerele naturale putem efectua următoarele operaţii:

- operaţii de ordinul I: adunarea şi scăderea;
- operaţii de ordinul II: înmulţirea şi împărţirea;
- operaţii de ordinul III: ridicarea la putere.

Proprietăţile adunării şi înmulţirii numerelor naturale

a. Comutativitatea: pentru orice numere naturale a şi b avem: $\begin{cases} a+b=b+a \\ a\cdot b=b\cdot a \end{cases}$.

b. Asociativitatea: pentru orice numere naturale a, b, c avem: $\begin{cases} (a+b)+c=a+(b+c) \\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c) \end{cases}$

c. 0 este element neutru la adunare: $a+0=0+a=a$, pentru orice număr natural a.
1 este element neutru la înmulţire: $a\cdot 1=1\cdot a=a$, pentru orice număr natural a.

d. Înmulţirea este distributivă faţă de adunare şi faţă de scădere: $\begin{cases} a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \\ a\cdot(b-c)=a\cdot b-a\cdot c \end{cases}$.

Operaţiile cu numere naturale şi relaţiile de egalitate/inegalitate

1. Fiind dată o egalitate $a=b$ între două numere naturale, egalitatea se păstrează dacă:
- **a.** în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a+c=b+c$;
- **b.** din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a-c=b-c$;
- **c.** ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural: $a=b\Rightarrow a\cdot c=b\cdot c$;
- **d.** ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a=b\Rightarrow a:c=b:c$.

2. Adunând sau înmulţind membru cu membru două egalităţi, egalitatea se păstrează:

$$\text{dacă } \begin{cases} a=b \\ c=d \end{cases} \quad \text{atunci } \begin{cases} a+c=b+d \\ a\cdot c=b\cdot d \end{cases}.$$

3. Fiind dată o inegalitate $a\le b$ între două numere naturale, inegalitatea se păstrează dacă:
- **a.** în ambii membri se adună acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a+c\le b+c$;
- **b.** din ambii membri se scade acelaşi număr natural: $a\le b\Rightarrow a-c\le b-c$;
- **c.** ambii membri se înmulţesc cu acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a\cdot c\le b\cdot c$;
- **d.** ambii membri se împart la acelaşi număr natural nenul: $a\le b\Rightarrow a:c\le b:c$.

Teorema împărţirii cu rest. Oricare ar fi numerele naturale a şi b, cu $b\neq 0$, există numerele naturale q şi r, unic determinate, astfel încât: $a=b\cdot q+r$ şi $0\le r<b$.

Numărul q se numeşte *câtul împărţirii*, iar numărul r se numeşte *rest*.

Exemplu. Fiind date numerele 23 şi 5, există şi sunt unice numerele naturale 4 şi 3 astfel încât să avem: $23=4\cdot 5+3$ şi $3<5$. Deci $23:5=4$ rest 3.

Puterea cu exponent natural a unui număr natural

Fie a şi n două numere naturale, cu $n \geq 2$. Produsul a n factori egali cu a se numeşte puterea a n-a a numărului natural a şi se notează a^n.

Scrierea a^n se citeşte „a la puterea n" sau „puterea a n-a a numărului a". În această scriere, a se numeşte *baza* puterii, iar n se numeşte *exponentul* puterii.

Aşadar: $a \cdot a = a^2$, $a \cdot a \cdot a = a^3$, şi, în general, $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ factori}} = a^n$, pentru $n \geq 2$.

Prin convenţie, $a^1 = a$ şi $a^0 = 1$, pentru orice număr natural $a \neq 0$. Nu are sens 0^0.

Pătrate perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a doua a unui număr natural se numesc *pătrate perfecte*.

Exemple. 81 şi 225 sunt pătrate perfecte, pentru că $81 = 9^2$ şi $225 = 15^2$.

Cuburi perfecte. Numerele naturale care pot fi scrise ca puterea a treia a unui număr natural se numesc *cuburi perfecte*.

Exemple. 27, 125 şi 64 sunt cuburi perfecte, întrucât $27 = 3^3$; $125 = 5^3$; $64 = 4^3$.

Ultima cifră a puterii unui număr natural. Deoarece ultima cifră a unui produs de numere este ultima cifră a produsului ultimelor cifre ale numerelor date, avem:

1. Numerele care se termină cu cifrele 0, 1, 5, 6, ridicate la orice putere nenulă, se vor termina cu aceleaşi cifre.

2. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 4 sau 9 se repetă din 2 în 2:
- **a.** puterile impare ale numerelor terminate în 4 se termină în 4, iar puterile pare nenule se termină în 6;
- **b.** puterile impare ale numerelor terminate în 9 se termină în 9, iar puterile pare nenule se termină în 1.

3. Ultima cifră a puterilor nenule ale numerelor terminate în 2, 3, 7 sau 8, se repetă din 4 în 4.

Reguli de calcul cu puteri. Fie a, b, m, n numere naturale, cu $a, b \neq 0$.

1. Înmulţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. Împărţirea puterilor cu aceeaşi bază: $a^m : a^n = a^{m-n}$, pentru orice $m \geq n$

3. Puterea unei puteri: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. Puterea unui produs: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. Puterea unui cât: $(a : b)^n = a^n : b^n$, pentru orice $a, b \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $a \,\vdots\, b$.

Observaţie. Sunt situaţii în care identităţile de mai sus se folosesc şi sub forma:

1. $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$ **2.** $a^{m-n} = a^m : a^n$ **3.** $a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ - regula de înmulţire a puterilor cu acelaşi exponent

5. $a^n : b^n = (a : b)^n$ - regula de împărţire a puterilor cu acelaşi exponent

Ordinea efectuării operaţiilor

1. Dacă într-un exerciţiu sunt operaţii de acelaşi ordin acestea se efectuează în ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta. Pentru a uşura calculul, putem folosi proprietăţile de comutativitate şi asociativitate ale adunării şi înmulţirii:

Exemple. **a.** $27 + 15 - 32 = 42 - 32 = 10$. **b.** $32 \cdot 5 : 8 \cdot 2 = 160 : 8 \cdot 2 = 20 \cdot 2 = 40$.

c. $137 + 455 + 63 + 45 = (137 + 63) + (455 + 45) = 200 + 500 = 700$.

d. $4 \cdot 231 \cdot 25 = (4 \cdot 25) \cdot 231 = 100 \cdot 231 = 23\,100$.

2. Dacă într-un exercițiu sunt operații de ordine diferite se efectuează, dacă există, mai întâi operațiile de ordinul trei, apoi operațiile de ordinul doi și, în final, operațiile de ordinul întâi, respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $24 : 2^3 \cdot 5 = 24 : 8 \cdot 5 = 3 \cdot 5 = 15$.

b. $340 : 17 + (5^4)^3 : 5^{10} - 700 : 35 = 340 : 17 + 5^{12} : 5^{10} - 700 : 35 =$
$= 340 : 17 + 5^2 - 700 : 35 = 340 : 17 + 25 - 700 : 35 = 20 + 25 - 20 = 25$.

3. Dacă într-un exercițiu există și paranteze, se efectuează mai întâi toate operațiile din parantezele rotunde, apoi cele din parantezele drepte (dacă există) și în final din acolade (dacă există) și în final ce avem în afara acoladelor (dacă există), respectând de fiecare dată ordinea în care sunt scrise, de la stânga la dreapta.

Exemple. **a.** $(38 + 275 : 25) \cdot 10 - 34 \cdot 11 = (38 + 11) \cdot 10 - 374 = 49 \cdot 10 - 374 = 116$.

b. $40 \cdot [100 : 4 + 5 \cdot (3^2 + 48048 : 24)] + 2011 =$

Calculăm paranteza rotundă: $3^2 + 48048 : 24 = 9 + 2002 = 2011$.
Calculăm paranteza dreaptă: $100 : 4 + 5 \cdot 2011 = 25 + 10055 = 10080$.
Reconstituim exercițiul: $40 \cdot 10080 + 2011 = 403200 + 2011 = 405211$.

Factoriale. Produsul primelor n numere naturale nenule se notează $n!$ și se citește „*n factorial*". Prin convenție, $0! = 1$.

Exemple. $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$, $5! = 120$, $7! = 5040$.

Suma primelor *n* numere naturale nenule. Sume Gauss

Teoremă. Pentru orice număr natural $n \geq 1$ are loc egalitatea:

$$\boxed{1 + 2 + \ldots + n = n(n+1) : 2.}$$

Într-adevăr, notând cu S suma primelor n numere naturale nenule, avem:

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 2 + 1$$

Adunând membru cu membru cele două relații, obținem:

$$2S = (1+n) + (2+n-1) + (3+n-2) + \ldots + (n-1+2) + (n+1),$$

adică $2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1)}_{n \text{ paranteze}} = n(n+1)$, de unde rezultă $S = n(n+1) : 2$.

La fel putem proceda pentru a calcula suma unor numere care se obțin numărând din r în r începând de la primul termen al sumei, unde $r \neq 0$ este un număr natural dat.

Exemplu. Calculați suma $S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$.

Mai întâi aflăm numărul de termeni ai sumei (cu ***metoda contorului***). Termenii sumei sunt din 3 în 3 și, observând că $20 = 3 \cdot \mathbf{6} + 2$, $23 = 3 \cdot \mathbf{7} + 2$ …, $257 = 3 \cdot \mathbf{85} + 2$, rezultă că numărul termenilor sumei este egal cu numărul de numere naturale de la 6 la 85, adică $85 - 6 + 1 = 80$.

Scriem suma cu termenii așezați în ordine crescătoare, apoi, sub ea, aceeași sumă, cu termenii așezați în ordine descrescătoare, după care adunăm termen cu termen.

$$S = 20 + 23 + 26 + \ldots + 254 + 257$$
$$S = 257 + 254 + 251 + \ldots + 23 + 20$$

$$2S = \underbrace{277 + 277 + 277 + \ldots + 277 + 277}_{80 \text{ termeni (numărul termenilor sumei } S)} = 80 \cdot 277 = 22160, \text{ deci } S = 22160 : 2 = 11080.$$

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieți numai rezultatele.

1. Scrierea numărului trei sute de mii opt este egală cu … .

2. Cel mai mic număr natural de trei cifre cu cifra zecilor 7 este egal cu … .

3. Aproximarea lui 345672 prin lipsă, la mii este egală cu … .

4. Dintre numerele $a = 102030$, $b = 123450$ și $c = 102100$ mai mare este … .

5. Cel mai mic număr natural cu produsul cifrelor 12 este egal cu … .

6. Secvența 3, 6, 9, 12, ..., 33 conține un număr de … numere naturale.

7. Numărul numerelor naturale impare de forma $\overline{a2b}$ este egal cu … .

8. Dacă pe axa numerelor sunt reprezentate punctele $O(0), A(11), B(7)$ și $C(23)$, atunci ordinea punctelor O, A, B, C pe axă este … .

9. Rezultatul calculului $19027 + 9278$ este egal cu … .

10. Rezultatul calculului $1006 - 297$ este egal cu … .

11. Rezultatul calculului $208 \cdot 17$ este egal cu … .

12. Rezultatul calculului $12 - 4 \cdot 2 + 3$ este egal cu … .

13. Dacă $ab + ac = 15$ și $b + c = 5$, atunci valoarea numărului a este egală cu … .

14. Rezultatul calculului $5 + 10 + 15 + ... + 40$ este egal cu … .

15. Suma a trei numere naturale consecutive este 21. Produsul numerelor este egal cu … .

16. Numărul zerourilor în care se termină produsul primelor 21 de numere naturale nenule este egal cu … .

17. Rezultatul calculului $1^4 + 2^0$ este egal cu … .

18. Numărul pătratelor perfecte din secvența 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 este egal cu … .

19. Ultima cifră a numărului 2^{2013} este egală cu … .

20. Dacă $1 + 3 + 5 + ... + 13 = x^2$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu … .

21. Numărul pătratelor perfecte de două cifre este egal cu … .

22. Dintre numerele $a = 2^{33}$ și $b = 3^{22}$, mai mic este numărul … .

23. Dintre numerele $x = 2^{55}$, $y = 2^{33}$ și $z = 2^{44}$, cub perfect este numărul … .

24. Dacă $2^6 \cdot 4^7 \cdot 8^8 = 2^x$, atunci valoarea numărului natural x este egală cu … .

25. Numărul natural care împărțit la 17 dă câtul 9 și restul 15 este egal cu … .

26. Suma resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 5 este egală cu … .

27. Suma a două numere naturale este 32. Împărțind numărul mai mare la cel mai mic obținem câtul 5 și restul 2. Numărul mai mic este egal cu … .

28. Numărul numerelor naturale care împărțite la 4 dau câtul 3 este egal cu … .

29. Un număr natural n dă restul 3 la împărțirea cu 4. Restul împărțirii numărului n la 2 este egal cu … .

30. Numărul care împărțit la 7 dă câtul 9 și restul 5 este egal cu … .

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

31. Se ştie că $a + b + c = 7$. Calculaţi:
a) $2a + 2b + 2c$; *b)* $10a + 10b + 10c$; *c)* $a \cdot 13 + b \cdot 13 + c \cdot 13 + 21$.

32. Se ştie că $a = 11$ şi $b + c = 8$. Calculaţi:
a) $ab + ac$; *b)* $2a + 3b + 3c$; *c)* $10a + 9b + 9c$;
d) $ab + ac + 25$; *e)* $ab + ac - 34$; *f)* $7b + 7c + 9a$;

33. Se ştie că $a + b + c = 23$ şi $x = 9$. Calculaţi:
a) $14a + 14b + 14c + 14x$; *b)* $2013 - (53a + 53b + 53c + 10x)$;
c) $349+6a + 6b + 6c - 12x$; *d)* $424 - 21x +3a + 3b + 3c$;

34. Calculaţi, scoţând factor comun:
a) $13 \cdot 5 + 13 \cdot 21 + 13 \cdot 40$; *b)* $437 \cdot 109 - 437 \cdot 54 + 437 \cdot 203$;
c) $49 \cdot 135 - 49 \cdot 27 + 49 \cdot 11$; *d)* $2011 \cdot 5 + 2011 \cdot 7 + 2011 \cdot 49 + 2011 \cdot 39$;

35. Dacă $x = 5$ şi $a + b = 13$, calculaţi:
a) $3 \cdot x + 7 \cdot a + 7 \cdot b$; *b)* $xa + xb - 50$;
c) $10 \cdot x - (4 \cdot a + 4 \cdot b)$; *d)* $(4a + 4b - 2x)\cdot(2a + 2b + x)$.

36. Calculaţi numărul x ştiind că $a - b = 6$ şi:
a) $x + 3 \cdot a - 3 \cdot b = 20$; *b)* $x \cdot a - x \cdot b + 9a - 9b = 654$;
c) $7 \cdot a - 7 \cdot b + x = 55$; *d)* $13 + x - (5 \cdot a - 5 \cdot b) = 2011$.

37. Dacă a, b, c sunt numere naturale astfel încât $a + b + c = 57$ şi $2a + b + 2c = 73$, calculaţi $(a + c) \cdot (5 \cdot a + 2 \cdot b + 5 \cdot c)$.

38. *a)* Dacă $a + b = 20$ şi $b + c = 30$, calculaţi $3a + 7b + 4c$.
b) Dacă $a + b = 33$ şi $a + c = 11$, calculaţi $5a + 3b + 2c$.

39. Ştiind că $x + 3y = 2y + z = 14$, calculaţi:
a) $x + 5y + z$; *b)* $3x + 15y + 3z$; *c)* $5x + 11y - 2z$; *d)* $5x + 19y + 2z$.

40. Produsul a două numere este 672. Mărind unul dintre numere cu 10, produsul devine 992. Determinaţi cele două numere.

41. Produsul a două numere este 1530. Micşorând unul dintre ele cu 20, produsul devine 850. Determinaţi cele două numere.

42. Produsul a trei numere consecutive este cu 48 mai mare decât produsul primelor două. Determinaţi cele trei numere naturale.

43. Efectuaţi:

a) $11 + 8 \cdot \{45 + 4 \cdot [3 + 8 \cdot (12 \cdot 13 - 8 \cdot 14) - 37]\} + 1234$;

b) $(32 \cdot 15 - 32 \cdot 5) + 11 \cdot 12 + 7 \cdot \{124 - 5 \cdot [210 - 2 \cdot (23 \cdot 17 - 24 \cdot 12)]\}$;

c) $12 + 12 \cdot \{12 + 12 \cdot [12 + 12 \cdot (12 \cdot 12 - 122)]\} + 12 \cdot 12$;

d) $[100 - 3 \cdot (13 \cdot 19 - 12 \cdot 18)] \cdot \{1 + 2 \cdot [3 + 4 \cdot (5 + 6 \cdot 7)]\}$;

e) $2483 - 23 \cdot [15 + 5 \cdot (127 - 119)] + 32 \cdot [178 - 5 \cdot (345 - 328)]$;

f) $\{[19 \cdot 6 - 107 + 12 \cdot 8] \cdot 2 - 176\} + [5467 - 16 \cdot (324 - 319)]$.

44. *a)* Determinaţi numerele naturale n, pentru care $8^n + 8^{n+1} = 18 \cdot 2^{2003}$.
b) Determinaţi numerele naturale n, pentru care $9^n + 9^{n+1} = 10 \cdot 3^{2012}$.

c) Determinați numerele naturale n, pentru care $6^n + 6^{n+3} = 217 \cdot 6^{55}$.
d) Determinați numerele naturale n, pentru care $7^{n+1} + 7^{n+2} = 8 \cdot 7^{11}$.

45. *a)* Arătați că numărul $a = 2003 + 2 \cdot (1 + 2 + \ldots + 2002)$ este pătrat perfect.
b) Arătați că numărul $b = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2011$ este pătrat perfect.
c) Arătați că numărul $a = 81 + 2 \cdot 81 + 3 \cdot 81 + \ldots + 49 \cdot 81$ este pătrat perfect.

46. *a)* Câte pătrate perfecte se găsesc între numerele 100 și 1000 ?
b) Câte numere naturale pătrate perfecte se află între 2000 și 3000?

47. Arătați că numerele naturale, de forma $5 \cdot (n + 1) + 6^{n+2} + 1001^{n+3} + 5$, nu pot fi pătrate perfecte, pentru orice valoare a numărului natural n.

48. Un număr natural este de 7 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 86 și mai mic decât 94?

49. Un număr natural este de 9 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 149?

50. Un număr natural este de 13 ori mai mare decât alt număr natural. Care sunt cele două numere, știind că cel mare este mai mare decât 140 și mai mic decât 155?

51. *a)* Determinați toate numerele naturale care împărțite la 6 dau câtul 13.
b) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul 103.
c) Determinați toate numerele naturale care împărțite la 7 dau câtul 32.

52. Suma a trei numere naturale este 121. Împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 10 și restul 5, iar împărțind al doilea număr la al treilea obținem câtul 5 și restul 4. Determinați cele trei numere.

53. Suma a trei numere naturale este 135. Împărțind primele două numere la al treilea obținem câturile 12 și 31, iar resturile 1 și respectiv 2. Determinați numerele.

54. Un număr este cu 72 mai mare decât alt număr. Împărțind suma lor la diferența lor obținem câtul 5 și restul 2. Determinați cele două numere.

55. *a)* Aflați toate numerele naturale nenule care împărțite la 7 dau restul egal cu câtul.
b) Aflați numerele naturale nenule care împărțite la 15 dau restul egal cu dublul câtului.
c) Calculați suma numerelor naturale care împărțite la 8 dau câtul 5.

56. Suma a trei numere naturale a, b, c este 232. Împărțind a la b obținem câtul 14 și restul 5, iar împărțind pe b la c obținem câtul 7 și restul 1. Determinați numerele.

57. Suma a trei numere naturale este 297. Împărțind primul număr la al doilea obținem câtul 2 și restul 25, iar împărțind primul număr la al treilea obținem câtul 11 și restul 8. Determinați cele trei numere.

58. Diferența a două numere naturale este 139. Împărțind numărul mai mare la dublul numărului mai mic obținem restul 6 și câtul 10. Determinați numerele.

59. Suma a două numere naturale este 334. Împărțind numărul mai mare la triplul numărului mai mic obținem câtul 36 și restul 7. Determinați numerele.

60. Diferența a două numere naturale este 149. Împărțind numărul mai mare la jumătatea numărului mai mic obținem câtul 16 și restul 9. Determinați numerele.

Tema 1.2
Numere întregi
(clasa a VI-a)

Numerele întregi pozitive, numerele întregi negative şi numărul 0 formează *mulţimea numerelor întregi*. Pentru scrierea acesteia se foloseşte simbolul $\mathbb{Z}$.

Avem $\mathbb{Z}=\{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$ sau $\mathbb{Z}=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, ...\}$.

Observaţii

1. Numărul 0 nu este pozitiv şi nici negativ.
2. Numerele întregi negative sunt folosite pentru a descrie temperaturi exprimate în grade Celsius sub limita de îngheţ, adâncimi sub nivelul mării, datorii etc.
3. Numerele întregi pozitive se identifică cu numerele naturale: $1=+1$; $2=+2$; $3=+3$ etc. Putem scrie aceasta printr-o relaţie între mulţimi $\mathbb{Z}_+=\mathbb{N}^*$.

Opusul unui număr întreg. În general, dacă n este un număr natural nenul, atunci:

- opusul numărului întreg pozitiv $+n$ este numărul întreg negativ $-n$.
- opusul numărului întreg negativ $-n$ este numărul întreg pozitiv $+n$.

Opusul numărului 0 este tot numărul 0, deoarece $+0=-0=0$. Opusul unui număr întreg x (fie pozitiv fie negativ) se notează cu $-x$.

Modul. *Valoarea absolută* sau *modulul* unui număr întreg a este distanţa de la origine la punctul ce îi corespunde numărului a pe axa numerelor. Se notează cu $|a|$.

1. Modulul unui număr pozitiv p este egal cu numărul însuşi: $|p|=p$.
2. Modulul unui număr negativ $-n$, $n\in\mathbb{N}$, este egal cu opusul său: $|-n|=-(-n)=+n$.
3. $|a|\geq 0$, pentru orice $a\in\mathbb{Z}$, cu egalitate pentru $a=0$.

Exemple: **a.** $|+3|=3$; **b.** $|-4|=4$; **c.** $|0|=0$.

Operaţii cu numere întregi

Operaţiile cu numere naturale se prelungesc la mulţimea numerelor întregi, ţinând cont de următoarele reguli:

Adunarea **a.** Suma a două numere întregi cu acelaşi semn este numărul întreg care are:
- modulul egal cu suma modulelor termenilor;
- acelaşi semn ca termenii sumei.

b. Suma a două numere întregi cu semne diferite este numărul întreg care are:
- modulul egal cu modulul diferenţei modulelor termenilor;
- semnul egal cu semnul termenului mai mare în modul.

c. Suma a două numere întregi opuse este 0.

Scăderea Diferenţa a două numere întregi este egală cu suma dintre primul termen şi opusul celui de-al doilea.

Înmulţirea Produsul a două numere întregi este numărul întreg care are:
- modulul egal cu produsul modulelor factorilor;
- semnul „+” dacă factorii au acelaşi semn şi semnul „–” dacă factorii au semne contrare.

Probleme propuse

PARTEA I. La următoarele probleme scrieţi numai rezultatele.

1. Opusul numărului întreg $a = 5 - 7$ este … .

2. Un număr întreg pozitiv se numeşte … .

3. Suma $3 + (-7) + (-10)$ este egală cu … .

4. Numărul întreg mai mare ca -5 şi mai mic decât -3 este egal cu … .

5. Se ştie că $a = -13$, $b = 13$, $c = 27$. Atunci $a - b + c$ este egal cu … .

6. Se ştie că $m = 11, n = -7, p = 13$. Atunci $m + 2n - 3p$ este egal cu ... .

7. Rezultatul calculului $(-5) \cdot (+12) : (-10)$ este egal cu ... .

8. Primul număr întreg mai mic decât -11 este egal cu ... .

9. Succesorul numărului întreg -28 este ... .

10. Predecesorul numărului întreg $+11$ este ... .

11. Rezultatul calculului $(-2)^3 \cdot (-4)^2 : (-2)^5$ este ... .

12. Numărul întreg $a = (-9)^7 \cdot 3^{10} : (-3)^{17}$ este egal cu ... .

13. Se ştie că $b = [13 + (-8 + 10)] : (-5)$. Atunci $2 \cdot b$ este egal cu ... .

14. Dacă $n = (-2)^6 \cdot [-3 + (15 - 4)] : 2^8$, atunci n este egal cu ... .

15. Se ştie că $5 < n < 7$, unde $n \in \mathbb{N}$. Atunci $-2n + 6$ este egal cu ... .

16. Dacă $a = (-1)^{n^2 + 3n}$, $n \in \mathbb{N}$, atunci $-10 \cdot a$ este egal cu ... .

17. Soluţia ecuaţiei $2x + 17 = -3x + 7$ este reprezentată de numărul întreg ... .

18. Cel mai mare număr întreg , soluţie a inecuaţiei $5x - 10 < -2x + (-24)$, este ... .

19. Cel mai mic număr întreg , soluţie a inecuaţiei $7x - 11 \geq -3x - 19$, este ... .

20. Numărul de numere întregi ce verifică $5 < 3x - 15 \leq 23$, este ...

PARTEA a II-a. La următoarele probleme scrieţi rezolvările complete.

21. Numerele întregi a şi b au raportul 3 şi suma -16. Determinaţi numerele a şi b.

22. Să se calculeze $a + (-3) \cdot b$, unde $a = 13 - (-15)$ şi $b = 21 : (-7)$.

23. Ştiind că $m = (-18) : (-6)$, $n = (-7) \cdot 2$, să se calculeze $3 \cdot m - 5 \cdot n$.

24. Calculaţi $(-1)^{10} + (-1)^{11} + ... + (-1)^{20}$.

25. Calculaţi $(-1)^1 - (-1)^2 + (-1)^3 - (-1)^4 + (-1)^5$.

26. Să se compare numerele întregi $(-2)^{30}$ şi $(-3)^{20}$.

27. Să se determine numărul de numere întregi mai mari decât -11 şi mai mici decât 13.

28. Să se calculeze suma tuturor numerelor întregi mai mari sau egale cu -11 şi mai mici decât 15.

29. Comparaţi numerele întregi $(-3)^{21}$ şi $(-2)^{35}$.

30. Să se determine valoarea numărului $a = 1-2+3-4+...+21-22$.

31. Calculaţi $(-2)^{21} : 4^{10} + 3^{10} : (-9)^3 - (-5)^{11} : 25^5$.

32. Fie mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -13 < x \leq 19\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.
b) Să se calculeze suma tuturor elementelor mulţimii A.

33. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -15 \leq 2x+3 < 20\}$.

a) Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.
b) Să se calculeze suma elementelor mulţimii A.

34. Să se determine toate numerele întregi n care verifică $|2n+1| = 7$.

35. Se consideră mulţimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |3x| < 21\}$. Să se determine numărul de elemente al mulţimii A.

36. Să se rezolve ecuaţia $|3x-1| + (-12) = 14$, ştiind că $x \in \mathbb{Z}$.

37. Să se determine cel mai mic număr întreg pozitiv care este soluţie pentru inecuaţia $|2x+3| \geq 12$.

38. Să se determine toate perechile de numere întregi (x,y), ştiind că $5xy + 2y = 14$.

39. Să se rezolve ecuaţia $x + 3x + 5x + ... + 13x = -490$, ştiind că $x \in \mathbb{Z}$.

40. Să se demonstreze că ecuaţia $(3x+2) \cdot (5y+3) = 9$ nu are soluţii întregi.

Tema 1.3
Divizibilitate
(clasele V - VI)

Divizibilitate. Numărul natural a se divide (este divizibil) cu numărul natural b, dacă există un număr natural c astfel încât $a = b \cdot c$.

Pentru a nota relația de divizibilitate, vom scrie într-unul din modurile:

- $a \vdots b$ care se citește „ a se divide cu b“ sau „a este multiplu al lui b“;
- $b \mid a$ care se citește „ b divide a“ sau „b este un divizor al lui a“.

a este divizibil cu b			b divide pe a			a este produsul factorilor b și c				
a	$\vdots$	b	b	$\mid$	a	a	$=$	b	$\cdot$	c
$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
multiplu		divizor	divizor		multiplu	multiplu		divizor		divizor

Observații.

1. Alte simboluri folosite sunt: $\not\vdots$ (citim „nu se divide cu“) și $\nmid$ (citim „nu divide“).

2. Dacă a și b sunt numere naturale, cu $b \neq 0$, atunci a este divizibil cu b, dacă restul împărțirii lui a la b este egal cu zero.

3. Numărul natural 0 este divizibil cu orice număr natural, iar 0 divide doar pe 0.

Exemple: **1.** $24 \vdots 8$, deoarece $24 = 8 \cdot 3$. **2.** $3 \mid 15$, deoarece $15 = 3 \cdot 5$.

3. $119 \vdots 7$, deoarece $119 : 7 = 17$, rest 0.

4. $2415 \not\vdots 13$, deoarece $2415 : 13 = 185$, rest 10.

Divizori improprii. Divizori proprii. Fie $a \geq 2$ un număr natural. Numerele 1 și a se numesc divizori *improprii* ai numărului a. Ceilalți divizori ai lui a (dacă există) se numesc divizori *proprii*.

Deoarece orice număr natural este divizor al numărul natural 0, iar numărul natural 1 are un singur divizor, și anume pe 1, nu se pune problema existenței divizorilor proprii, respectiv improprii, pentru numerele 0 și 1.

Exemplu: Divizorii improprii ai lui 10 sunt 1 și 10, iar divizorii proprii sunt 2 și 5.

Mulțimea divizorilor naturali ai numărului natural n este mulțimea D_n a tuturor numerelor naturale care divid pe n. Se notează: $D_n = \{d \in \mathbb{N} \mid n \vdots d\}$.

Mulțimea multiplilor naturali ai numărului natural n este mulțimea tuturor numerelor naturale care se divid cu n. Se notează: $M_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \vdots n\}$.

Exemple: $D_{14} = \{1,2,7,14\}$; $D_{18} = \{1,2,3,6,9,18\}$; $D_3 = \{1,3\}$;

$M_3 = \{0,3,6,9,...\}$; $M_{12} = \{0,12,24,36,...\}$;.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, atunci D_n este o mulțime finită, iar M_n este o mulțime infinită. Pentru $n = 0$ avem $D_0 = \mathbb{N}$ și $M_0 = \{0\}$.

Numere prime. Un număr natural care are exact doi divizori se numește număr *prim*.

Cu alte cuvinte, un număr natural $p \geq 2$ este prim dacă și numai dacă singurii săi divizori sunt 1 și p.